Determinación de la constante elástica, k, de un resorte. Estudio estático y dinámico.

Nombre: Manuel

Apellidos: Fernandez Nuñez

Curso: 2º A

Fecha: 29/02/2008

Índice

Introducción

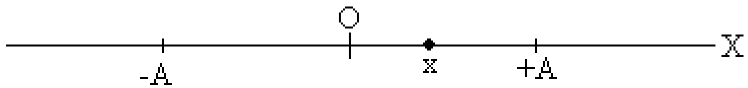
Definición de M.A.S.

Un movimiento se llama periódico cuando a intervalos regulares de tiempo se repiten los valores de las magnitudes que lo caracterizan. Un movimiento periódico es oscilatorio si la trayectoria se recorre en ambas direcciones. Un movimiento oscilatorio es vibratorio si su trayectoria es rectilínea y su origen se encuentra en el centro de la misma.

El movimiento armónico es un movimiento vibratorio en el que la posición, velocidad y aceleración se pueden describir mediante funciones senoidales o cosenoidales. De todos los movimientos armónicos, el más sencillo es el Movimiento Armónico Simple, que es al que nos referiremos de aquí en adelante.

Una partícula describe un Movimiento Armónico Simple (M.A.S.) cuando se mueve a lo largo del eje X, estando su posición x dada en función del tiempo t por la ecuación

$x=A\cdot\text{sen}(\omega t+\varphi)$



donde

- A es la amplitud.
- ω la frecuencia angular.
- $\omega t+\varphi$ la fase.
- φ la fase inicial.

Las características de un M.A.S. son:

- Como los valores máximo y mínimo de la función seno son +1 y -1, el movimiento se realiza en una región del eje X comprendida entre $-A$ y $+A$.

- La función seno es periódica y se repite cada 2π, por tanto, el movimiento se repite cuando el argumento de la función seno se incrementa en 2π, es decir, cuando transcurre un tiempo *P* tal que $\omega(t+P)+\varphi=\omega t+\varphi+2\pi$. T=2π/ω

Cinemática de un M.A.S.

En un movimiento rectilíneo, dada la posición de un móvil, obtenemos la velocidad derivando respecto del tiempo y luego, la aceleración derivando la expresión de la velocidad.

La **posición** del móvil que describe un M.A.S. en función del tiempo viene dada por la ecuación

$x=A\cdot\mathrm{sen}(\omega t+\varphi)$

Derivando con respecto al tiempo, obtenemos la **velocidad** del móvil

$$v=\frac{dx}{dt}=A\omega\cdot\cos(\omega t+\varphi)$$

Derivando de nuevo respecto del tiempo, obtenemos la **aceleración** del móvil

$$a=\frac{dv}{dt}=-A\omega^2\cdot\mathrm{sen}(\omega t+\varphi)=-\omega^2 x$$

Este resultado se suele expresar en forma de ecuación diferencial

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2 x=0$$

Esta es la ecuación diferencial de un MAS donde *x* puede ser cualquier magnitud: un desplazamiento lineal, un desplazamiento angular, la carga de un condensador, una temperatura, etc.

Puede comprobarse que la solución de esta ecuación diferencial es

$x=A\ \text{sen}(\omega t+\varphi)$

Condiciones iniciales

Conociendo la posición inicial x_0 y la velocidad inicial v_0 en el instante $t=0$.

$x_0=A\cdot\text{sen}\varphi$
$v_0=A\omega\cdot\cos\varphi$

se determinan la amplitud A y la fase inicial φ

$$A=\sqrt{x_0^2+\frac{v_0^2}{\omega^2}} \qquad \tan\varphi=\frac{x_0\omega}{v_0}$$

Relación entre T (periodo) y k (constante de elasticidad)

La ecuación general de la fuerza es F=m*a en el que a es la segunda derivada de x por lo que la ec. Nos queda F= m*$d^2x\ /\ dt^2$.

En el m.a.s. la fuerza proviene del propio desplazamiento en x, F=-k*x.

Entonces nos quedamos con la igualdad de m*$d^2x\ /\ dt^2$ = -K*x. Si dividimos la m en ambos lados nos queda $d^2x\ /\ dt^2$ = -k/m*x.

Si hacemos la segunda derivada de $x=A\cdot\text{sen}(\omega t)$ nos queda la ec. como:

$d^2x\ /\ dt^2 = -A\,\omega^2$ sin(wt). Sacamos la A el sin w y t y añadimos la x de la ec. $x=A\cdot\text{sen}(\omega t)$.

Obteniendo: $d^2x / dt^2 = \omega^2$ *x que junto con la ec. d^2x / dt^2 = -k/m*x que obtuvimos antes podemos igualar para obtener: ω^2 =k/m, sacamos el cuadrado w = $\sqrt{k/m}$. Como w =2π/T entonces 2π/T = $\sqrt{k/m}$. Despejamos el periodo y obtenemos T= 2 π $\sqrt{m/k}$.

Dinámica de un M.A.S.

Aplicando la segunda ley de Newton obtenemos la expresión de la fuerza necesaria para que un móvil de masa *m* describa un M.A.S. Esta fuerza es proporcional al desplazamiento *x* y de sentido contrario a éste.

$$F = ma = -m\,\omega^2 x$$

Como la fuerza *F* es conservativa. El trabajo de dicha fuerza es igual a la diferencia entre el valor inicial y el final de la energía potencial E_p.

$$\int_{x_1}^{x_2} F\cdot dx = E_{p1} - E_{p2}$$

$$\int_{x_1}^{x_2} F\cdot dx = \int_{x_1}^{x_2} -kx\cdot dx = -\frac{1}{2}m\omega^2 x^2\Big[_{x_1}^{x_2} = \frac{1}{2}m\omega^2 x_1^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 x_2^2$$

La expresión de la energía potencial es

$$E_p(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 + c$$

Donde *c* es cualquier constante. Se toma como nivel cero de la energía potencial E_p=0 cuando el móvil está en el origen, *x*=0, por lo que *c*=0

La energía total *E*, es la suma de la energía cinética E_k y de la energía potencial E_p que es constante.

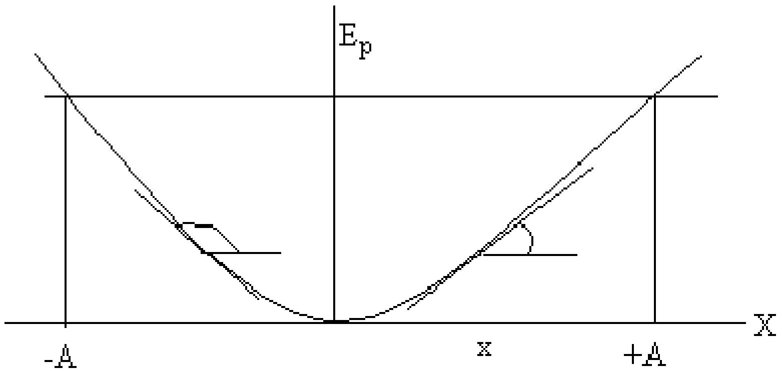
$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 =$$

$$\frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \varphi) + \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \mathrm{sen}^2(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2$$

Curva de energía potencial

La función $E_p=m\omega^2x^2/2$ representa una parábola cuyo vértice está en el origen, que tiene un mínimo en x=0 cuyo valor es E_p=0.

Las región donde se puede mover la partícula está determinada por la condición de que la energía cinética ha de ser mayor o igual a cero $E_k>=0$. En otras palabras, que la energía total sea mayor o igual que la energía potencial $E>=E_p$. Si la partícula tiene una energía total E, la partícula solamente se podrá mover en la región comprendida entre $-A$ y $+A$, siendo A la amplitud de su M.A.S.



El módulo y el sentido de la fuerza vienen dados por la pendiente de la recta tangente cambiada de signo. Por tanto, la fuerza que actúa sobre la partícula es negativa a la derecha del origen y positiva a la izquierda.

$$F = -\frac{dE_p}{dx} = -m\omega^2 x$$

Objetivos

Los objetivos de esta práctica serán:

La determinación de K estáticamente, verificando la ley de Hooke.

Determinar que la k de un resorte no depende de su longitud.

Determinar la k de dos resortes distintos con iguales características geométricas, comprobando que son diferentes.

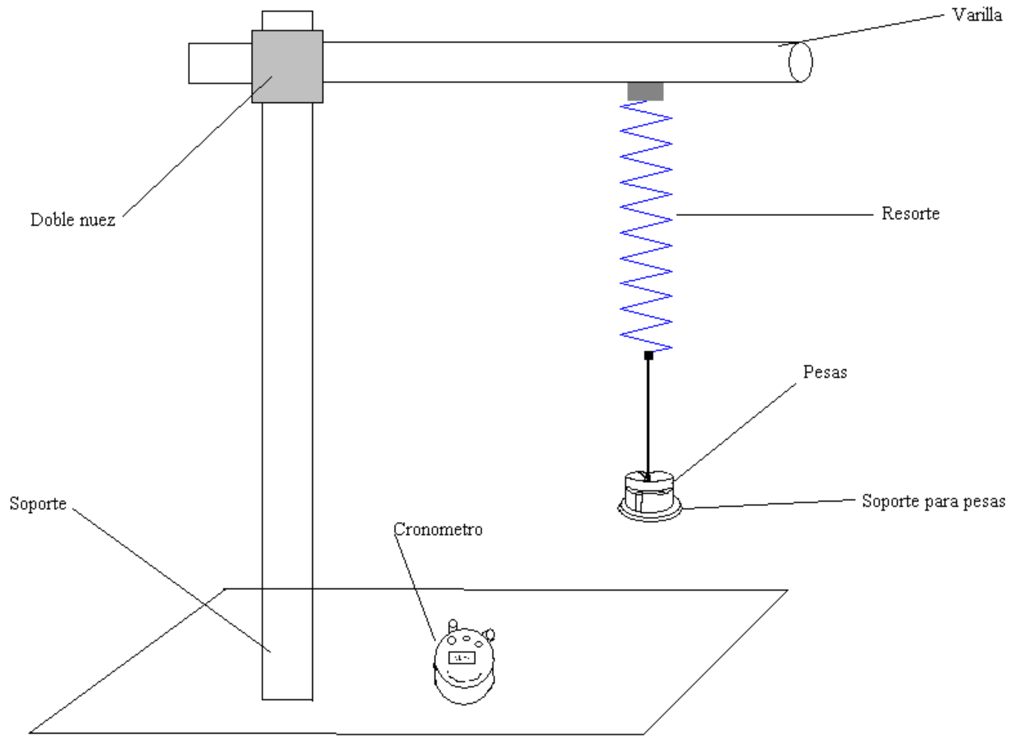
Ver como el período de vibración depende de la masa vibrante.

Y por último determinar k dinámicamente, comprobando este valor con el obtenido por el método estático.

Materiales y montaje

Para realizar esta práctica necesitaremos: un soporte, una doble nuez, una varita metálica, un porta pesas, un juego de pesas de 10gr. e 50gr., dos resortes de acero, una regla, un cronometro y la bascula.

El montaje lo realizaremos de la siguiente forma:



Procedimientos

Método estático

Después de tener el soporte montado cogemos los resortes y los sujetamos al resorte. Del otro extremo ponemos el soporte de las pesas después de pesarlo en la báscula.

Cogemos el peso que queremos y ponemos las pesas en el resorte que previamente medimos sin peso y con peso para saber su punto de equilibrio.

Método dinámico

Estiramos ligeramente el resorte y hacemos que vibre y en este momento pondremos los cronómetros a cronometrar mientras que contamos cincuenta oscilaciones.

En un papel apuntamos todos los resultados de tiempo obtenidos para cincuenta oscilaciones apuntando la masa y la longitud del resorte con la que realizamos la observación.

Así sucesivamente con todos los valores con los que realizamos la práctica.

En el cuadro de la página siguiente tenemos recogidos los datos obtenidos.

Cálculos y resultados

Método estático

Datos, resorte A

Método estático

Resorte A

Masa (g)	Fuerza (N)	Longitud (cm)		Longitud2 (cm)		A Longitud	K (N/m)	
		medida	media	medida	media		resultado	media
0,07	0,686	18,5	18,967	23,5	23,3	0,0433333	15,8307692	20,5749503
		18,9		23				
		19,5		23,4				
0,0804	0,78792	18,5	18,967	24	23,733	0,0476667	16,5297902	
		18,9		23,4				
		19,5		23,8				
0,10096	0,989408	18,5	18,967	29,2	29,4	0,1043333	9,48314377	

		18,9		29,5				
		19,5		29,5				
0,165	1,617	18,5	18,967	27,2	27,1	0,0813333	19,8811475	
		18,9		27,4				
		19,5		26,7				

Error del método gráfico	N/m

Cálculos

Fuerza	F=m*g

Datos	Operaciones	Resultado
F1	F=0.07*9.8	0,686
F2	F=0.0804*9.8	0,78792
F3	F=0.10096*9.8	0,989408
F4	F=0.165*9.8	1,617

Constante de elasticidad	K=F/L

Datos	Operaciones	Resultado
K1	K=0.686/0.0433	15,83076923
K2	K=0.78792/0.04767	16,52979021
K3	K=0.989408/0.10433	9,48314377
K4	K=1.617/0.081333	19,88114754

Datos, resorte B

Método estático

Resorte B

Masa (g)	Fuerza (N)	Longitud (cm)		Longitud2 (cm)		A Longitud	K (N/m)	
		medida	media	medida	media		resultado	media
0,07	0,686	18,5	18,96667	23,5	23,3	0,04333333	15,8307692	23,6493211
		18,9		23				
		19,5		23,4				
0,0804	0,78792	18,5	18,96667	24	23,73333	0,04766667	16,5297902	
		18,9		23,4				
		19,5		23,8				
0,1404	1,37592	18,5	18,96667	29,2	29,4	0,10433333	13,1877316	
		18,9		29,5				
		19,5		29,5				
0,2108	2,06584	18,5	18,96667	27,2	27,1	0,08133333	25,3996721	
		18,9		27,4				
		19,5		26,7				

Error del método grafico	N/m

Cálculos

Fuerza	F=m*g

Datos	Operaciones	Resultado
F1	F=0.07*9.8	0,686
F2	F=0.0804*9.8	0,78792

F3	F=0.1404*9.8	1,37592
F4	F=0.2108*9.8	2,06584

Constante de elasticidad	K=F/L

Datos	Operaciones	Resultado	
K1	K=0.686/0.0433		15,83077
K2	K=0.78792/0.04767		16,52979
K3	K=1.37592/0.10433		13,18773
K4	K=2.06584/0.081333		25,39967

Método dinámico

Datos, resorte A

Resorte A		Método dinámico	Para 50 oscilaciones

Masa (kg)	Tiempos (s)		Periodo	Periodo	Constante K	
	medida	media			Resultados	Media
0,0304	13,84	13,7566667	0,27513333	0,07569835	15,8382229	19,6375971
	13,5					
	13,93					
0,0608	17,72	17,6866667	0,35373333	0,12512727	19,1633263	
	17,97					
	17,37					

0,0806	20	20,0933333	0,40186667	0,16149682	19,6829577	
	20					
	20,45					
0,13	25,18	25,0133333	0,50026667	0,25026674	20,4861103	
	24,81					
	25,05					
0,1501	25,39	25,3566667	0,50713333	0,25718422	23,0173682	
	25,28					
	25,4					

Error del metodo grafico	N/m

Cálculos

Periodo	T =t/n

K	k=4 *m/T

Datos	Operaciones		Resultados	Datos	k=4 *m/T	Resultado
T1	T =13.75667/50		0,27513333	K1	k=4 *m/T	15,8382229
T2	T =17.686667/50		0,35373333	K2	k=4 *m/T	19,1633263
T3	T =20.09333/50		0,40186667	K3	k=4 *m/T	19,6829577
T4	T =25.013333/50		0,50026667	K4	k=4 *m/T	20,4861103
T5	T= 25.356667/50		0,50713333	K5	k=4 *m/T	23,0173682

Datos, resorte B

Resorte B

Metodo dinamico	Para 50 oscilacions

Masa (kg)	Tiempos (s)		Periodo	Periodo	Constante K	
	medida	media			Resultados	Media
0,0304	13,36	13,3966667	0,26793333	0,07178827	16,7008808	17,91872274
	13,03					

	13,8					
0,0608	20,25	20,34	0,4068	0,16548624	14,4897529	
	20,05					
	20,72					
0,0806	21	21,2866667	0,42573333	0,18124887	17,5379577	
	21					
	21,38					
0,13	25,12	25,2133333	0,50426667	0,25428487	20,1623949	
	25,22					
	25,3					
0,1501	26,9	26,7366667	0,53473333	0,28593974	20,7026274	
	27,25					
	26,06					

Error del metodo grafico	N/m

Cálculos

Periodo	T =t/n

K	k=4 *m/T

Datos	Operaciones	Resultados	Datos	k=4 *m/T	Resultado
T1	T =13.396667/50	0,26793333	K1	k=4 *m/T	16,70088082
T2	T =20.34/50	0,4068	K2	k=4 *m/T	14,48975286
T3	T =21.286667/50	0,42573333	K3	k=4 *m/T	17,53795773
T4	T =25.213333/50	0,50426667	K4	k=4 *m/T	20,16239495
T5	T= 26.7366667/50	0,53473333	K5	k=4 *m/T	20,70262736

Conclusiones

Hemos llegado finalmente a una obtención de unos resultados de k mediante dos metodos con unos resultados de:

En el método dinámico dos resultados uno para cada resorte:

Ka=17.91872274 m/s y de Kb=19.6375971 N/m.

En el metodo estatico obtuvimos dos resultados uno para cada resorte:

Ka=20.5749503 m/s y de Kb=23.6493211 N/m.

Con los dos métodos obtenemos una k media para el resorte a de K=19.24682 N/m.

Y para el resorte b obtenemos una k media de K=21.643455 N/m.